



**You have downloaded a document from
RE-BUS
repository of the University of Silesia in Katowice**

Title: Gottlob Frege o prawdzie w okresie wydawania dwóch tomów Grundgesetze der Arithmethik (1893-1903)

Author: Gabriela Besler

Citation style: Besler Gabriela. (2018). Gottlob Frege o prawdzie w okresie wydawania dwóch tomów Grundgesetze der Arithmethik (1893-1903). "Studia Semiotyczne" (T. 32, nr 2 (2018), s. 51-73), doi 10.26333/sts.xxxii2.04



Uznanie autorstwa - Użycie niekomercyjne - Bez utworów zależnych Polska - Licencja ta zezwala na rozpowszechnianie, przedstawianie i wykonywanie utworu jedynie w celach niekomercyjnych oraz pod warunkiem zachowania go w oryginalnej postaci (nie tworzenia utworów zależnych).



UNIWERSYTET ŚLĄSKI
W KATOWICACH



Biblioteka
Uniwersytetu Śląskiego



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

GABRIELA BESLER*

GOTTLÖB FREGE O PRAWDZIE W OKRESIE WYDAWANIA DWÓCH TOMÓW *GRUNDGESETZE DER ARITHMETIK* (1893–1903)

STRESZCZENIE: W latach 1893 i 1903 ukazały się dwa tomy najważniejszego dzieła Fregego *Grundgesetze der Arithmetik*. Ten okres można nazwać „szczytem logicyzmu” Fregego. Choć temat prawdy w logiczno-filozoficznej twórczości Fregego był podejmowany wielokrotnie, to brakuje pozycji skupiającej się na badaniu poglądów w tym okresie. Dotyczy to w szczególności literatury polskiej. Moim zadaniem jest zebranie i uporządkowanie wszystkich wypowiedzi Fregego na temat prawdy w okresie wydawania wspomnianych tomów. Realizując to zadanie, badam użycie tego pojęcia w pierwszym tomie *Grundgesetze der Arithmetik* oraz w niepublikowanym tekście *Logik*. Podejmuję zagadnienie funkcjonowania tego terminu w szczególnych kontekstach: antynomii, geometrii i wyrażania ogólności. Na koniec zasygnalizuję kwestię sposobu rozumienia późniejszych wypowiedzi Fregego na temat prawdy.

SŁOWA KLUCZOWE: Gottlob Frege, prawda, logika, wartości logiczne, myśl, logicyzm.

WSTĘP

Prawda jest drugim, po liczbie, wielkim tematem filozoficznym Gottloba Fregego. W swej ponad czterdziestoletniej działalności naukowej wielokrotnie modyfikował jej koncepcję¹. Zmiany nie miały

* Uniwersytet Śląski w Katowicach, Instytut Filozofii. E-mail: gabriela.besler@us.edu.pl. ORCID: 0000-0002-1843-5198.

¹ Więcej na ten temat zob.: Sluga (2002), Besler (2010, s. 189–201).

jednak charakteru gwałtownych zwrotów, raczej polegały na poszukiwaniu koherencji zaproponowanego rozumienia prawdy i precyzowaniu pierwotnych intuicji. Dodam, że Frege zawsze był przeciwny określaniu prawdy jako zgodności przedstawienia (czy zdania) z rzeczywistością.

W latach 1893 i 1903 ukazały się dwa tomy najważniejszego dzieła Fregego *Grundgesetze der Arithmetik*. Był to okres², który można nazwać „szczytem logicyzmu” Fregego, okres, w którym wierzył w sukces swojego projektu i z pewnością pracował nad jego dalszym rozwojem.

Chociaż temat prawdy w logiczno-filozoficznej twórczości Fregego był podejmowany wielokrotnie, w ujęciu diachronicznym (Sluga, 2002) i synchronicznym (Burge, 2005; Dummett, 1981; Greimann, 2003a, 2003b, 2007), to brakuje pozycji skupiającej się na badaniu poglądów w szczytowym okresie rozwoju logicyzmu Fregego. W literaturze można znaleźć jedynie rozproszone uwagi, skupiające się na prawdzie jako wartości logicznej, a temat wart jest szerszego spojrzenia. W tym artykule stawiam więc następujące zadanie badawcze: zebrać i uporządkować wszystkie wypowiedzi Fregego na temat prawdy w okresie wydawania dwóch tomów *Grundgesetze der Arithmetik*. Odwołam się do tekstów opublikowanych za życia Fregego, opublikowanych pośmiertnie oraz do korespondencji z tego okresu³. Temat prawdy pojawia się tam w odniesieniu do logiki, filozofii języka, filozofii logiki, filozofii matematyki i ontologii.

Dorobek naukowy Fregego z lat 1893–1903 jest bardzo specyficzny. Pomiędzy dwoma tomami *Grundgesetze der Arithmetik* ukazała się niewielka książeczka poświęcona liczbom w ujęciu Schuberta, rzadko wymieniana jako książka Fregego (1899/1990). Na 29 pozostałych tekstów 6 zostało opublikowanych za życia Fregego, 5 niepublikowanych

² Właściwie wyróżniony tu okres trwał do 16 czerwca 1902, kiedy to Frege otrzymał pierwszy list od Russella (Russell, 1902/1976) informujący go o możliwości skonstruowania antynomii na podstawie pierwszej książki Fregego (Frege, 1879/1997). Sformułowaną trudność Frege odniósł do systemu logicznego z *Grundgesetze der Arithmetik* (Frege, 1893, 1903). Więcej na ten temat w pozycji Besler (2015, s. 95–97; w druku).

³ Z wyjątkiem jednego listu do Russella, z 1902 (Frege, 1902/1976a), żaden tekst z tego okresu nie został dotąd przetłumaczony na język polski. Na gruncie polskim znane są Fregego ujęcia prawdy sprzed tu badanego okresu i po nim, bo ukazały się polskie tłumaczenia odpowiednich tekstów (Frege, 1892/1990a; 1892/1990b; 1918–1919/1990a).

za jego życia i nieprzygotowanych przez niego do druku. Pozostałych 18 tekstów to listy, w zdecydowanej większości listy o charakterze naukowym, pisane z dużą starannością i kierowane do wybitnych naukowców tamtej epoki: Giuseppe Peana (1858–1932), Davida Hilberta (1862–1943), Heinricha Liebmann (1847–1939), Bertranda Russella (1872–1970).

W badanym tu okresie powstały więc w sumie 32 teksty⁴, nie we wszystkich jednak temat prawdy w ogóle się pojawia. Na szczególną uwagę zasługują: *Grundgesetze der Arithmetik* (Frege, 1893/2009) oraz *Logik* (Frege, 1897–1898b/1983). Dlatego tym pozycjom zostaną poświęcone osobne paragrafy, a wątki dotyczące prawdy z innych tekstów zostały pogrupowane tematycznie: problem antynomii, geometria, wyrażanie ogólności, inne.

Pisma Fregego ukazują całe bogactwo pojęć związanych z prawdą. Oto terminologia typowa dla badanego tu okresu, z pierwszego tomu *Grundgesetze der Arithmetik*, wraz z liczbami występowania tych słów: prawda (*Das Wahre*, 150), prawdziwość (*Wahrheit*, 112), wartość logiczna (*Wahrheitswert*, 97), fałsz (*das Falsche*, 78), prawa prawdziwości (*Gesetze des Wahrseins*, 12). Ponadto Frege często używa także przymiotnika (predykatu) prawdziwy/fałszywy (*wahr/falsch*)⁵. Powyższa terminologia występuje także w innych pozycjach z badanego tu okresu, wyjątki będą sygnalizowane.

W pozycji zamykającej badany tu okres (Frege, 1903/2009a) powyższe słowa występują rzadziej, a sformułowań „fałsz” oraz „prawa prawdziwości” w ogóle nie ma. Wydaje się, że nie mamy tu do czynienia ze zmianą poglądów Fregego, ale z innym charakterem tej książki. W czternastostronicowym dodatku (Frege, 1903/2009b), dołączonym do już wtedy drukowanego tomu (Frege, 1903/2009a), po liście napisanym przez Russella (1902/1976a), w kontekście wprowadzenia szybkiej poprawki do systemu logicznego (Frege, 1893/2009, 1903/2009a), z powyższych słów występują (jako słowa techniczne) tylko (i to w jednym zdaniu): „prawda”, „fałsz”.

⁴ Pełna bibliografia Fregego znajduje się w pozycji Besler (2010).

⁵ Przyjmuję tutaj terminologię ustaloną przez Bogusława Wolniewicza (1927–2017) z wyjątkiem pisania słów „prawda” i „fałsz” z dużej litery. Ponadto nie zawsze da się konsekwentnie tłumaczyć *Wahrheit* jako „prawdziwość” (Rygalski, 2004, s. 296), z czym także borykał się Wolniewicz.

Słowa merytorycznie związane z prawdą to: przebieg wartości funkcji (*Wertverlauf*)⁶, myśl (*Gedanke*), sprzeczność (*Widerspruch*), twierdzenie lub zdanie twierdzące (*Behauptungssatz*), sąd (*Urtheil*), nauka. Warto tu odnotować, że w tekście *Logik* napisanym przez Fregego w 1897–1898 (Frege, 1897–1898b/1983) nie ma wyrażenia „wartości logiczne”, a w żadnym z omawianych tu tekstów (a dokładniej w żadnym tekście Fregego) nie ma wyrażenia „warunki prawdziwości” (*Wahrheitsbedingungen*), przywoływanego często przez filozofów analitycznych odnoszących się do Fregego koncepcji prawdy (Besler, 2010, s. 76).

W spuściznie po Fregem zostały odnalezione trzy teksty, które traktuje się jako niedokończone podręczniki z logiki: jeden napisany w 1879–1891, drugi w 1897–1898b, trzeci – w 1906 (Frege, 1983). Jako części czwartego podręcznika z logiki są zaś traktowane artykuły opublikowane w ramach serii *Logische Untersuchungen*: (Frege, 1918–1919/1990a; 1918–1919/1990b; 1923/1990). Tam Frege przedstawia swe tezy na temat prawdy, myśli, sensu i znaczenia (*Bedeutung*), natury logiki, negacji oraz ogólności, co odpowiada tematyce poprzednich niedokończonych podręczników do logiki. W żadnym z wyżej wymienionych tekstów nie ma notacji logicznej Fregego, a ich tematyka mieści się w zakresie filozofii logiki.

Przyjmuje się, że tekst *Logik* został napisany w latach 1897–1898, a więc pomiędzy wydaniem dwóch tomów *Grundgesetze der Arithmetik*. Tematem wiodącym jest tam prawda, jako istotnie związana z logiką.

Wydaje się, że datowanie tego tekstu nie powinno wiązać się z żadnymi trudnościami, ponieważ Frege:

1. Podaje datę w pewnym zdaniu: „[...] 1 stycznia 1897, południe wg czasu środkowoeuropejskiego” (Frege, 1897–1898b/1983, s. 147)⁷.
2. Odwołuje się do czasopisma z psychologii fizjologicznej, które ukazuje się od 1874 (s. 156).
3. Odnosi się do pewnej recenzji, napisanej w 1897 (s. 156).

⁶ „Przebieg wartości funkcji” to termin techniczny Fregego, rozumiany jako zbiór wszystkich przyporządkowań argumentów z dziedziny danej funkcji do odpowiednich wartości tej funkcji (Cook, 2013, s. A-16–A-18).

⁷ Tłumaczenie fragmentów niepublikowanych w języku polskim – Gabriela Besler, chyba, że podano inaczej.

Zadziwia jednak podobieństwo wielu tez dotyczących prawdy i koncepcji myśli do znacznie późniejszego tekstu (Frege, 1918–1919/1990a). Oto możliwe wyjaśnienia tej sytuacji, z każdym wiąże się kontrargument:

1. Tekst powstał znacznie później, a podana data nie była związana z dniem pisanie tekstu. Może była znacząca dla Fregego z jakiegoś nieznanego nam powodu. Przeciwno temu rozwiązaniu świadczy powołanie się na recenzję z 1897.
2. Frege nie zmienił swych poglądów w okresie 20 lat lub powrócił do wcześniej wypracowanych rozwiązań. Jeśli tak, to koncepcja obiektywnej myśli jako gwaranta prawdy i fałszu byłaby o wiele wcześniejsza niż prace z okresu emerytalnego. Przeciwno temu rozwiązaniu świadczy brak powtarzania tych tez w innych pismach z tego okresu, także w listach.
3. Brak w tym tekście sformułowania „wartość logiczna”, typowego dla badanego tu okresu.

Na użytek pisanego tu artykułu przyjmuję jednak, że tekst *Logik* został napisany w 1897–1898 (Frege, 1897–1898b/1983) powstał więc pomiędzy dwoma tomami *Grundgesetze der Arithmetik*.

GRUNDGESETZE DER ARITHMETIK (1893)

Zadaniem tej pozycji i kolejnych planowanych tomów, z których ukazał się tylko drugi (Frege, 1903/2009a), było przedstawienie arytmetyki jako rozwiniętej logiki (Frege, 1893/2009, s. VII⁸). O logice napisane zostało, że zajmuje się prawami prawdziwości, w przeciwieństwie do psychologii, która jest zainteresowana prawami myślenia (Frege, 1893/2009, s. XVI). W tym kontekście pojawia się temat prawdy, rozpatrywanej z punktu filozofii języka, oraz – wraz z fałszem – jako kategoria wykorzystywana w logice.

Filozoficzny aspekt prawdy jest przedstawiony w *Vorwort*, jednym z dwóch wprowadzeń do pierwszego tomu *Grundgesetze der Arithmetik*⁹. W tu omawianym okresie Fregego filozofia języka była już w pełni roz-

⁸ W całym tekście podano strony odnoszą się do pierwszego wydania tej pozycji.

⁹ Osobnym tematem jest, dlaczego Frege napisał dwa, treściowo różne wprowadzenia, jedno nazwane *Vorwort*, drugie *Einleitung*.

winięta, ugruntowana, raczej nie podlegała dalszym zmianom. Frege korzystał z niej do charakterystyki prawdy. Podstawą jego filozofii języka było wyróżnienie (tylko) trzech rodzajów wyrażeń językowych: zdania, nazwy własne i predykaty. Każde z tych wyrażeń posiada sens i znaczenie (rozumiane jako „obiekt”, do którego odnosi się dane wyrażenie)¹⁰. Sensem zdania jest myśl, a jego znaczeniem jedna z dwóch wartości logicznych¹¹: prawda lub fałsz.

Przedstawiając swą filozofię języka, Frege odsyła czytelnika do wcześniejszego artykułu (Frege, 1892/1990b), gdzie te tematy przedstawił najpełniej.

Do wykorzystania sensu i znaczenia w kontekście prawdy Frege doszedł także od innej strony. Treść, jako element odróżniony od uznania prawdziwości, określił on jako nadającą się do osądu i wyróżnił w niej dwa kolejne elementy (Frege, 1893/2009, s. X):

1. Myśl, która jest sensem zdania.
2. Wartość logiczna, która jest znaczeniem zdania.

Z historycznego punktu widzenia najważniejsze okazało się sformułowanie „wartość logiczna”, kluczowe zarówno dla filozofii jak i logiki Fregego (a właściwie całej późniejszej logiki XX wieku). Pisał: „[...] odróżniam dwie wartości logiczne: prawdę i fałsz” (Frege, 1893/2009, s. X).

Wartości logiczne, podobnie jak liczby (*Zahl*, nie *Anzahl*¹²), były rozumiane jako abstrakcyjne przedmioty, a przedmioty charakteryzowały się tym, że w ich nazwie własnej nie było miejsca na argument (s. 7). Wszystkie zdania prawdziwe (fałszywe) odnoszą się do jednego obiektu: prawdy (fałszu). Poniżej reprezentatywne wypowiedzi Fregego w tym zakresie:

Nazwy $2^2 = 4$ i $3 > 2$ znaczą tę samą wartość logiczną, którą krótko nazywam prawdą (s. 7).

¹⁰ Więcej na temat kategorii semantycznych w *Grundgesetze der Arithmetik* można znaleźć w jednym z tekstów Hecka (Heck, 2010).

¹¹ Język wartości do filozofii wprowadzili Hermann Lotze (1817–1881) i Wilhelm Windelband (1848–1915), z którymi Frege był w kontakcie. Windelband posługiwał się sformułowaniem *Wahrheitswert*, a Lotze – *Gedanke*, rozumianymi inaczej niż w tekstach Fregego (Sluga, 2002, s. 84–85; Besler, 2010, s. 27–28, 73–81).

¹² O różnicy między *Zahl* i *Anzahl* zob. Besler (2010, s. 165–166; 2013, s. 140–142).

Funkcja $\xi^2 = 4$ może mieć dwie wartości, a mianowicie prawdę dla argumentu 2 i -2 oraz fałsz dla wszystkich innych argumentów (s. 7).

Na podstawie powyższych cytatów można powiedzieć, że każde zdanie prawdziwe jest nazwą własną obiektu, jakim jest jedna z dwóch wartości logicznych, w tym przypadku obiektem tym jest prawda. Analogicznie ze zdaniami fałszywymi. Jako przykłady zdań odnoszących się do prawdy podawał: $2 + 3 = 5$ oraz $2 = 2$. Poprawny był więc następujący zapis: $(2 + 3 = 5) = (2 = 2)$ (s. 9), gdzie znak „=” pomiędzy nawiasami pokazywał identyczność wyrażeń w nawiasach na poziomie znaczenia tych wyrażeń, ale nie na poziomie ich sensu.

W tym kontekście dodam, że funkcje (w tym także funkcje zdaniowe) nie mają wartości logicznej, bo jako wyrażenia z pewną niewiadomą są niekompletne. Wartość logiczną uzyskują dopiero po uzupełnieniu przez argument, ale wtedy formuła już nie jest funkcją. Podam przykład w odniesieniu do funkcji, jaką było pojęcie, rozumiane przez Fregego jako taka funkcja, której wartością jest jedna z dwóch wartości logicznych: prawda lub fałsz (s. 8). Na przykład pojęcie czerwieni jest właściwie funkcją „ x jest czerwone”, prawdziwą dla jednych argumentów, a dla innych fałszywą.

W tekście poświęconym porównaniu swej notacji logicznej z notacją Peana, Frege pisze następująco o związkach między tymi kategoriami: „[...] wszystkie zdania prawdziwe znaczą to samo, prawdę, a wszystkie zdania fałszywe – fałsz” (Frege, 1896/1990, s. 225). „Używam słowa «zdanie» w sensie kombinacji symboli, których sens jest myślą a znaczenie wartością logiczną: prawdą lub fałszem” (Frege, s. 227).

W filozofii języka i w logice Fregego zdanie zbudowane niepoprawnie jest fałszywe (Frege, 1893/2009, s. 10; Frege 1896/1990, s. 230). Podawał on następujący przykład: wprowadził znak na słońce \odot i matematycznie zapisał, że ów znak jest większy od 2: „ $\odot > 2$ ”. Tak powstałe zdanie uznał za fałszywe, bo słońce nie jest liczbą, chociaż prawdziwe jest następujące zdanie: „ $(\odot > 2) \supset (\odot^2 > 2)$ ” (Frege, 1896/1990, s. 230). Z definicji funktora implikacji wynika bowiem, że formuła jest prawdziwa, gdy poprzednik i następnik są fałszywe.

Warto tu dodać, że nie każde poprawnie syntaktycznie zdanie ma wartość logiczną. Frege wyróżnia dwie takie sytuacje:

1. Zdanie podrzędne w mowie zależnej. Generalnie, myśl jest sensem zdania, ale w mowie zależnej myśl jest przez Fregego traktowana

jako znaczenie zdania podrzędnego (Frege, 1893/2009, s. X), a więc zdanie podrzędne, jeżeli jest zdaniem składowym zdania w mowie zależnej, jest pozbawione wartości logicznej.

2. Zdania z nazwą własną pozbawioną znaczenia np. zdania poezji (Frege, 1896/1990, s. 227); jest to zasada wyraźnie sformułowana w późniejszym tekście, ale i w tym okresie obowiązująca (Frege 1897–1898a/1983, s. 169).

Wyżej omówione poglądy Fregego pokazują, że prawda jest istotnie związana z jego koncepcją myśli. Właściwie nie tylko prawda, ale i fałsz. Frege pisał bowiem także o myślach fałszywych, jako przykłady podawał: $0^2 = 4$; $1^2 = 4$; $3^2 = 4$ (1893/2009, s. 6).

Uzupełnieniem powyższych kategorii jest myśl, o której pisał także, że jest sensem nazwy pewnej wartości logicznej (Frege, 1893/2009, s. 7). Później pisał nawet o „królestwie myśli” (Frege, 1918–1919/1990a), uznając samą myśl za pewną rzeczywistość obiektywną, niezmienną, gwarantującą możliwość uprawiania nauki, w istotny sposób związaną z logiką. Pisał tak: „Wyrażam myśli za pomocą moich znaków i podałem zestawienie ważniejszych teorematów wraz z ich przekładem” (Frege, 1893/2009, s. XI).

Prawda jest kategorią istotnie wykorzystywaną przez Fregego także w logice formalnej. Dla przykładu, prawa logiczne są nazwane prawami prawdziwości (Frege, 1893/2009, s. XVI). Niektóre z praw logicznych pełniły funkcję praw podstawowych, niedowodzonych w systemie Fregego, jednym z nich było problematyczne prawo V¹³.

W okresie pisania dwóch tomów *Grundgesetze der Arithmetik* wartości logiczne są używane przez Fregego do określenia warunków prawdziwości zdań zbudowanych z funktorów i kwantyfikatorów. Wcześniej w tym kontekście Frege posługiwał się słowami: uznać (*bejahen*), zaniegować (*verneinen*) (Frege, 1879/1997, s. 5)¹⁴, a nie „prawda” i „fałsz”¹⁵. Poniżej te symbole logiczne, które Frege charakteryzował z odniesieniem do wartości logicznych (podaję je w kolejności wprowadzania

¹³ Więcej na ten temat w paragrafie *Problem antynomii*.

¹⁴ W wydaniu polskim s. 54. W innych przypadkach, w tekstach tłumaczonych na język polski, podane strony odnoszą się do wydania polskiego.

¹⁵ Warto tu dodać, że Frege (obok E. Schrödera i Ch. S. Peirce'a) jest uważany za twórcę tabelki prawdziwościowych. Z kolei Schröder w tym kontekście używał słów: „jest ważne” (*es gilt*), „nie jest ważne” (*es gilt nicht*) (Marek, 1993, s. 10–11).

przez Fregego): kreska sądu, kreska pozioma, kreska negacji, znak równości, oznaczenie kwantyfikujące, kreska implikacji.

Przywołując swą pierwszą książkę (Frege, 1879/1997), pisał, że odróżnia „[...] dwie składowe w tym, czego zewnętrzną formą jest zdanie twierdzące” (Frege, 1893/2009, s. X):

1. Rozpoznanie prawdy.
2. Treść, która jest rozpoznana jako prawdziwa.

„Rozpoznanie prawdy” jest „zaznaczane” na formule logicznej poprzez dołączenie tak zwanej kreski sądu, co Frege opisał następująco:

Potrzebujemy jeszcze pewnego szczególnego znaku, by móc o czymś twierdzić, że jest prawdziwe. W tym celu pozwolę sobie poprzedzić znakiem \vdash nazwę wartości logicznej tak, że na przykład w $\vdash 2^2 = 4$ będzie stwierdzone, że kwadrat z 2 wynosi 4 (Frege, 1893/2009 s. 9; por. Greimann, 2000).

Konieczność owej kreski sądu jest dla Fregego tak oczywista, naturalna i konieczna, że w liście do Peana, z którym korespondował w tym okresie, pisał:

Sam np. mam znak \mid , kreskę sądu, która służy do uznawania czegoś za prawdziwe. Pan nie ma odpowiedniego znaku, ale rozpoznaje Pan różnicę między tym przypadkiem, że wyraża się tylko pewną myśl, nie uznając jej za prawdziwą, a tym, gdzie się ją stwierdza (Frege, 1896/1976, s. 185–186).

Tak zwana kreska pozioma jest znakiem funkcji jednoargumentowej od przedmiotów, której wartością jest jedna z dwóch wartości logicznych (Frege, 1893/2009, s. 16–17). Wartością tej funkcji jest prawda, gdy argumentem jest prawda. Możliwe są jeszcze dwa inne przypadki:

1. Argumentem jest fałsz.
2. Argumentem nie jest żadna z wartości logicznych, ale np. 2 (Frege, 1893/2009, s. 10).

Wtedy wartością tej funkcji jest fałsz.

Negację (zapisywaną jako krótka kreska dołączona do kreski poziomej) określił jako wartość funkcji fałszywej dla każdego argumentu, dla której ta funkcja bez znaku negacji jest prawdziwa dla każdego argumentu (s. 10).

Wyrażenie ze znakiem równoważności odnosi się do prawdy wtedy, gdy po obu stronach tego funktora występuje wyrażenie o tej samej wartości logicznej, a fałszywe w każdym innym przypadku (s. 11).

Kwantyfikator ogólny był zapisywany przez Fregego jako wglębie-
nie w kresce treści wraz z literą alfabetu gotyckiego. Przyjmował, że za-
pis ten „Znaczy prawdę kiedy wartością funkcji $\Phi(\xi)$ dla każdego argu-
mentu jest prawda, w przeciwnym przypadku fałsz” (s. 12).

Implikacja była zapisywana jako kreska pionowa łącząca dwie kre-
ski poziome i charakteryzowana jako fałszywa w przypadku, gdy po-
przednik jest prawdą, a następnik nie jest prawdą (s. 26).

Frege podaje jeszcze przykłady funkcji, których wartością dla każ-
dego argumentu jest to, co fałszywe:

1. $\dot{\epsilon}(\epsilon = \neg a = a)$ czytane jako przebieg wartości funkcji „nie-
prawda, że dla każdego a , $a = a$ ” (s. 17).
2. Przypadek połączenia znakiem równości jednej z wartości lo-
gicznych i przebiegu wartości funkcji (s. 17).

W logice Fregego prawda była także wykazywana za pomocą wy-
nikania logicznego. W tekście napisanym między 1899 a 1906 pisał:
„Prawdy [*Wahrheiten*] mogą być wywnioskowane z logicznych praw
wnioskowania. Gdy mamy daną pewną prawdę [*Wahrheit*], można za-
pytać, z jakich innych prawd wynika jej bycie prawdziwą, zgodnie z lo-
gicznymi prawami wynikania” (Frege, 1899–1906/1983, s. 183).

Podsumowując temat prawdy u Fregego (Frege, 1893/2009), moż-
na powiedzieć, że była dla niego zarówno kategorią filozoficzną jak
i użytecznym „narzędziem” do badania wartości logicznej formuł lo-
gicznych i wnioskowań oraz charakterystyki funktorów i kwantyfikatora.
Wyrażana była słownie lub za pomocą kreski asercji.

LOGIK (1897–1898):

NIEDOKOŃCZONY PODRĘCZNIK Z LOGIKI

Ten nieopublikowany przez Fregego tekst jest wart szczególnej
uwagi z paru powodów, w tym ze względu na metodę, jaką Frege
się w nim posługuje: odwoływanie się do sposobów używania pojęcia
„prawdziwy” w języku codziennym. Frege wymienia słowa z nim zwią-
zane i słowa niemające z nim istotnego związku, chociaż na co dzień
takie wyrażenia są używane. Dalej zbiera konteksty, w których to sło-
wo występuje i odrzuca mylące, niewłaściwe jego użycia. Porównuje
go pod względem językowym do innych predykatów (Frege, 1897–
1898b/1983, s. 140) i wymienia różnice. Predykat „prawdziwy” nie ma

nic wspólnego z przedstawieniami, a jego stosowanie w odniesieniu do cielesności jest niezasadne (s. 137, 140)¹⁶.

Frege postuluje wyznaczyć granice zasadnej stosowalności słowa „prawdziwy”. Choć nie formułuje on wyraźnie takiego stanowiska, na podstawie tego i innych tekstów można powiedzieć, że przede wszystkim predykat „prawdziwy” przysługuje myśli, w drugiej kolejności zdaniom, a w szczególności zdaniom twierdzącym (s. 137, 140). Zdania są bowiem „właściwym środkiem wyrazu myśli” (s. 137), a myśl jest sensem zdania (s. 137).

W języku naturalnym „prawdziwy” jest łączony także z przedstawieniem i doświadczeniem, co Frege odrzuca jako niezasadne. Piśsze także, iż nie potrzebujemy słowa „prawdziwy”, by powiedzieć, że przedstawienie katedry w Kolonii zgadza się z rzeczywistością. Jako zasadne użycie słowa „prawdziwy” podaje orzeczenie tej cechy o zdaniu $2 + 3 = 5$ (s. 140). Jeżeli zaś mówi się o przedstawieniach, że są prawdziwe, to właściwie ma się na uwadze myśl, której predykat jest przypisany (s. 137).

Poniżej zostaną zebrane wypowiedzi Fregego na temat słowa „prawdziwy”:

Choć dla każdej nauki prawda jest celem, to jednak logika w szczególny sposób jest związana z predykatem „prawdziwy”, podobnie jak fizyka z predykatami „ciężki” i „ciepły”, a chemia z „kwaśny” i „alkaliczny” (s. 138, 139). „Słowo «prawdziwy» wyznacza cel logice, cechuje logikę” (s. 137); służy logice tak, jak „dobry” etyce, a „piękny” estetyce (s. 139). Między zdaniami logiki może zachodzić sprzeczność, między sądami dotyczącymi tego, co piękne – nie (s. 138).

Predykaty „prawdziwy” i „piękny” różnią się od siebie istotnie. To, co prawdziwe jest – jak pisze Frege – „w sobie prawdziwe” (s. 143). To, co piękne, nie jest jednak „w sobie piękne” (s. 137). Ponadto predykat „prawdziwy” nie jest stopniowany, inaczej niż „piękny” – ten da się stopniować (s. 137).

Dla Fregego logika, podobnie jak etyka, jest nauką normatywną, o najogólniejszych prawach prawdziwości (s. 139). W dalszej części tekstu pisał tak: „W logice chodzi o prawa prawdziwości, a nie o takie prawa, które są uważane za prawdziwe; [w logice] nie chodzi o pyta-

¹⁶ Wszystkie cytaty z tej sekcji, o ile nie zaznaczono inaczej, pochodzą ze wspomnianej w śródtytułe pozycji.

nie, jak przebiega ludzkie myślenie, ale o to, jak musi ono przebiegać, by nie uchybić prawdzie” (s. 161). Dlatego prawa prawdziwości są przeciwstawiane prawom myślenia i prawom sądzenia, którymi zajmuje się psychologia (s. 157–158). Ponadto, owe „[...] prawa prawdziwości, jeżeli w ogóle są prawdziwe, jak wszystkie myśli, to są zawsze prawdziwe” (s. 160).

W tu omawianym, niedokończonym podręczniku do logiki Frege po raz pierwszy wyraźnie pisze o niedefiniowalności prawdy: „Prawdziwość jest oczywiście czymś tak pierwotnym i prostym, że sprowadzenie jej do czegoś jeszcze prostszego nie jest możliwe” (s. 140). Frege prawdziwość uważa za niedefiniowalną. W takich przypadkach Frege uważał, że pozostaje jedynie „[...] naprowadzanie czytelnika lub słuchacza przez pośrednie sugestie” (Frege, 1892/1990, s. 46). W późniejszym tekście, z 1914 roku, ta czynność zostanie nazwana rozjaśnianiem (*Erläuterung*), odróżnianym od definiowania (Frege, 1914/1983, s. 224). Może nie byłoby to takie rażące, gdyby nie świadomość, że dla Fregego rozjaśnianie dokonywało się poza nauką, było zaledwie jej propedeutyką¹⁷.

Frege wiele miejsca poświęcił koncepcji myśli, jednak to jej w sensie zasadniczym przysługuje kwalifikacja prawdziwości, zdaniom twierdzącym – jako językowym wyrazom myśli – wtórnie.

W jego koncepcji myśli, po pierwsze, prawdziwość (czy fałszywość) nie jest kwestią uznania przez tego czy innego człowieka. Obiektywność prawdziwości (czy fałszywości) wynika z „umocowania” tego predykatu w obiektywnej myśli. Frege uważał, że tym samym jest zapewniona obiektywność w nauce. Pisał:

Myśli nie potrzebują być przez nas myślane, by były prawdziwe. [...]. Myśli są niezależne od naszego myślenia. Myśl nie jest dla [podmiotu] myślącego tak właściwa, jak przedstawienie dla [podmiotu] posiadającego przedstawienia. [...] W przeciwnym razie nigdy dwoje ludzi nie łączyłoby tej samej myśli z tym samym zdaniem (Frege 1897–1898b/1983, s. 138).

Dalej, myśl nie jest natury psychicznej. Gdyby tak było, to „[...] jej prawdziwość opierałaby się tylko na relacji do czegoś uzewnętrznionego, a tym czymś byłaby myśl, o prawdę której pytaliśmy” (s. 138). Ponadto, gdyby myśl była natury psychicznej, to zdania matematycz-

¹⁷ Więcej na ten temat w pozycji *Gottloba Fregego koncepcja analizy filozoficznej* (Besler, 2010, s. 148–149).

ne wyglądałyby następująco: „Zauważono, że u wielu ludzi występują pewne przedstawienia, które są powiązane z zdaniem « $2 + 3 = 5$ »” (s. 145).

I ostatnia ważna cecha koncepcji Fregego: myśli mogą być prawdziwe lub fałszywe, ich fałsz też bowiem nie zależy od mówiącego (s. 138).

PRAWDA W SZCZEGÓLNYCH KONTEKSTACH

Problem antynomii

Prawda, fałsz i słowa z nimi związane pojawiają się w korespondencji Fregego z Bertrande Russelllem. Korespondencja ta dotyczy problemu antynomii i wydania drugiego tomu *Grundgesetze der Arithmetik* (Frege, 1903/2009a, wraz z Frege, 1903/2009b)¹⁸, a prawda jest tam przedstawiana w dwóch kontekstach: filozoficznym i logicznym.

Frege próbował przekonać Russella do swojej filozofii języka, co nie było łatwe, i co właściwie mu się nie udało. Tym niemniej mamy wiele klarownych fragmentów związanych z filozoficznymi rozwiązaniami przyjętymi dla prawdy (fałszu). Treściowo raczej nie wnoszą nic nowego do wcześniej tu zreferowanego stanowiska Fregego, ale warto są szczególnej uwagi ze względu na precyzję i jednoznaczność sformułowań. Oto dwa przykłady, jeden z 1902 roku, drugi napisany rok później:

Wie Pan o tym, że odróżniam sens od znaczenia znaków i że sens zdania nazywam myślą, a jego znaczenie – wartością logiczną. Wszystkie zdania prawdziwe mają to samo znaczenie: prawdę; wszystkie zdania fałszywe zaś mają to samo znaczenie: fałsz (Frege, 1902c/1983, s. 231).

[...] wszystkie zdania, które wyrażają prawdziwe myśli, znaczą to samo, podobnie wszystkie zdania, które oznaczają fałszywe myśli. Mamy np. $3 > 2$. $\supset .2^2 = 4$ i $2^2 = 4$. $\supset .3 > 2$; zatem $3 > 2$. $= .2^2 = 4$ (Frege, 1903/1976, s. 241).

O roli tego, co prawdziwe i tego, co fałszywe w logice Fregego świadczy poniższy fragment z jeszcze innego listu Fregego do Russella (z 1902 r.): „Zauważam – odnośnie do ostatnich punktów poruszonych przez Pana – co następuje: $\dot{\epsilon}(\neg\epsilon)$ jest klasą, która zawiera tylko jeden jedyny przedmiot, mianowicie prawdę, a $\dot{\epsilon}(\epsilon = \neg^a a = a)$ jest klasą,

¹⁸ Więcej na temat korespondencji Fregego z Russelllem zob. w innych pozycjach mojego autorstwa (Besler, 2015; Besler, w druku).

która zawiera tylko jeden jedyny przedmiot, mianowicie fałsz” (Frege, 1902b/1976, s. 219).

Prawdziwość jest w istotny sposób związana z prawem V, prowadzącym do antynomii. Mówi ono o ekwiwalencji równości przebiegów dwóch różnych funkcji i równości wartości tych funkcji dla każdego argumentu, co Frege zapisywał następująco (1893/2009, s. 36):

$$\vdash (\dot{e}f(\epsilon) = \dot{a}g(\alpha)) = (\neg f(a) = g(a))$$

Frege próbował ratować przed antynomią swój system logiczny umożliwiający definiowanie podstawowych pojęć arytmetyki liczb naturalnych przez wprowadzenie ograniczenia ogólności funkcji (Frege, 1903/2009c). Tam temat prawdy i fałszu pojawia się tylko w jednym miejscu: „[...] zakres pojęcia, pod które podpada tylko prawda, powinno być prawda, a zakres pojęcia, pod które podpada tylko fałsz, powinien być fałsz. To ustalenie nie doznało żadnej zmiany wraz z nowym ujęciem zakresów pojęć” (Frege, 1903/2009c, s. 561).

Dodam tu, że problematyczności prawa V Frege był świadomy na prawie 10 lat przed odkryciem Russella. Pisał tak:

Jeżeli, na przykład, ktoś miałby znaleźć coś błędnego, musi być w stanie określić dokładnie, gdzie według niego tkwi błąd: w prawach podstawowych, w definicjach, zasadach lub w ich zastosowaniu w pewnym określonym miejscu. Jeśli się uzna, że wszystko jest w porządku, tym samym zna się podstawy, na których opiera się każde jedno twierdzenie. Uważam, że spór może wywołać tylko jedno z moich praw podstawowych, prawo V, traktujące o przebiegu wartości funkcji [podkreślenie – G B]. To prawo nie jest jeszcze wyraźnie sformułowane przez samych logików, chociaż o tym się myśli, na przykład, gdy mówi się o zakresach pojęć. Uważam to za czysto logiczne. W każdym razie tym samym zostało określone miejsce, gdzie musi nastąpić decyzja (Frege, 1893/2009, s. VII).

Można więc powiedzieć, że Frege od początku wątpił w prawdziwość prawa V (Heck, 2010, s. 349–352), prawa kluczowego dla projektu logicyzmu.

Geometria

Frege zapoznał się z nowym ujęciem geometrii, jakim było *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta (1899). Był pod dużym wrażeniem tej książki, ale nie potrafił się zgodzić z Hilbertem, nie akceptował (nie

rozumiał) geometrii pojętej jako system formalny, dopuszczający wiele modeli, w tym modeli geometrii euklidesowej. Temat prawdy pojawia się w tej korespondencji w kontekście innego rozumienia aksjomatów w systemie geometrii i ich funkcji. Dla Fregego aksjomaty są prawdziwymi zdaniami, które nie potrzebują żadnego udowadniania, bo „[...] ich poznanie wypływa z całkiem innych logicznych źródeł poznawczych – można nazwać je oglądem przestrzennym [*Raumanschauung*]. Z prawdy o aksjomatach wynika to, że jeden nie stoi w sprzeczności z drugim” (Frege, 1899/1976, s. 63).

Wszystkie aksjomaty geometrii euklidesowej były dla Fregego niepodważalnie prawdziwe: „Będzie więc niemożliwe na obszarze geometrii elementarnej, euklidesowej, podanie takiego przykładu, gdyż właśnie tutaj wszystkie aksjomaty są prawdziwe” (Frege, 1900/1976, s. 71). Ponadto, według Fregego aksjomaty z konieczności były także z sobą niesprzeczne. Prawdziwość i niesprzeczność aksjomatów wzajemnie się warunkowały.

Hilbert nie przyjmował takiego (idealistycznego) rozumienia myśli, istotnie różniło więc tych korespondentów tło filozoficzne, zawsze obecne w analizach Fregego, rzadko spotykane w listach adresowanych do niego. W ujęciu Fregego owe zdania-aksjomaty wyrażają myśli-aksjomaty (Blanchette, 2015, s. 111).

Analogicznie do wielu tematów opracowywanych przez Fregego, także w kontekście prawdy w geometrii pojawiła się filozofia języka. W niepublikowanym tekście z okresu 1899–1906 na temat geometrii pisał tak:

Mając na uwadze myśl pytamy o jej prawdziwość (*Wahrsein*). Najwygodniej nazwać prawdziwą myśl prawdziwością (*Wahrheit*). Pewna nauka to całość połączonych prawd (*Wahrheiten*). Ujmowana przez nas myśl domaga się odpowiedzi na pytanie o jej prawdziwość (*Wahrsein*). Rozpoznanie bycia prawdziwą pewnej myśli czy jak możemy także powiedzieć, rozpoznanie pewnej prawdy (*Wahrheit*) manifestujemy, gdy wypowiadamy zdanie z mocą twierdzącą (Frege, 1899–1906/1983, s. 183).

Po zakończeniu korespondencji z Hilbertem Frege jeszcze parę razy wracał do wyrażenia opinii na temat geometrii w jego ujęciu. W jednym z opublikowanych tekstów powtarza tezę o prawdziwości i niesprzeczności aksjomatów (Frege, 1903/1990).

Dodam, że zarzuty i komentarze Fregego do geometrii Hilberta były szeroko dyskutowane, a Frege przeszedł do historii geometrii jako obrońca prawdziwości aksjomatów (Freudenthal, 1957/2009, s. 494).

Wyrażanie ogólności

Z prawdziwością Frege łączył wyrażanie ogólności. W logice Fregego ogólność wyrażeń jest zapisywana na dwa sposoby:

1. Za pomocą symbolu kwantyfikatora.
2. Przez odpowiedni rodzaj zmiennych.

Jako osobny symbol jest wprowadzony tylko kwantyfikator ogólny:

$$, \neg \Phi(a)'$$

jak już wcześniej podawałam, charakteryzowany w odniesieniu do wartości logicznych.

Frege posługuje się także kwantyfikatorem szczegółowym (nie nazywając go tak), chociaż jest on nieobecny jako odrębny znak. Zapisuje go przy użyciu kwantyfikatora ogólnego i negacji, na przykład:

$$\vdash \neg \exists a^2 = 1,$$

odczytany jako „istnieje co najmniej jedno rozwiązanie równania $a^2 = 1$ ” (Frege, 1893/2009, s. 12). Prawdopodobnie z uwagi na brak osobnego symbolu na kwantyfikator szczegółowy, Frege prawdziwość łączy tylko z wyrażaniem ogólności i nie odnosi się do wyrażania kwantyfikacji szczegółowej.

Frege zapisuje ogólność także przez zastosowanie odpowiedniej litery zmiennej. Dla przedmiotów są to litery alfabetu łacińskiego, x , a , itd. (Frege, 1893/2009, s. 11). Pisał: „By uzyskać wyrażenie dla ogólności, można pomyśleć o [jego] zdefiniowaniu: „Pod $\Phi(x)$ będzie rozumiana prawda, kiedy funkcja $\Phi(\xi)$ jest prawdą dla każdego argumentu, a w przypadku przeciwnym jest fałszem” (Frege, 1893/2009, s. 11).

Dla funkcji są to duże litery alfabetu greckiego, Φ , Γ , itd. (Frege, 1893/2009, s. 35). Funkcje wyższych rzędów też mają odpowiednie symbole dla argumentów (Frege, 1893/2009, s. 60–61).

Prawdziwość jest dla Fregego istotnie związana z wyrażaniem ogólności praw, bo formuły wyrażające ogólność – z zachowaniem powyższych zasad – wyrażają zarazem prawdziwe myśli (Frege, 1898–1903/1983, s. 176–177).

W tym kontekście ponownie pojawia się także kreska sądu. Mogą nią być poprzedzone tylko formuły będące zdaniami lub formuły

z określoną, ogólną dziedziną funkcji, a więc formuły z kwantyfikatorem lub z zmiennymi wyrażającymi ogólność.

Przypadkiem formuły w sposób istotny związanej z ogólnością jest prawo V (Frege, 1893/2009, s. 36), prowadzące do antynomii (Frege, 1902a/1976)¹⁹. Wyraża ono równoważność równości przebiegów wartości dwóch funkcji z równością tych dwóch funkcji dla każdego argumentu. Po odkryciu antynomii Frege ograniczył zasięg dziedziny tych funkcji i tym samym ograniczył zasięg prawdziwości prawa V (Frege, 1903/2009b, s. 559–560). Uważał, że tym samym utracił ogólność twierdzeń arytmetycznych (Frege, 1903/2009b, s. 551).

Inne konteksty

W omawianym tu okresie temat prawdy pojawia się jeszcze w innych kontekstach, przedstawionych w korespondencji Fregego z wielkimi matematykami tamtych czasów: Hilbertem (1862–1943) i Giusepem Peanem (1858–1932).

Pierwszy list Fregego do Hilberta dotyczy symboliki matematycznej i w tym kontekście pojawia się temat prawdziwości. Frege odnosił się do matematyki rozumianej jako gra symboli, w oderwaniu od ich znaczeń i pisał:

[...] czysto mechaniczne operowanie formułami jest niebezpieczne: 1. Dla prawdziwości rezultatów, 2. Dla wydajności nauki. Pierwsze zagrożenie prawdopodobnie da się usunąć prawie zupełnie dzięki logicznemu udoskonalaniu oznaczania. Co się tyczy drugiego, to doprowadzilibyśmy naukę do zastoju, gdyby [czysty] mechanizm formalny wziął górę, tak że zupełnie zdusiłby myśli (Frege 1895/1976, s. 58–59)²⁰.

Kolejny wątek pochodzi z listu Fregego do Peana (lata 1896–1903) i dotyczy konsekwencji wynikających z różnorakiego definiowania równości w arytmetyce:

[...] matematycy wprowadzić zgadzają się w zewnętrznej formie swoich twierdzeń, ale nie w myślach, którymi są powiązane, a te są przecież sednem rzeczy. Co udowadnia ten matematyk, a co tamten rozumie pod tym samym znakiem, to nie jest to samo. Tylko pozornie mamy wielki wspólny skarb prawd

¹⁹ Więcej na ten temat w jednej z innych moich publikacji (Besler, 2015, s. 95–97).

²⁰ W tym liście Frege nawiązuje do swojego wcześniej opublikowanego artykułu (Frege, 1885/1990). Nie wiadomo, czy Hilbert znalazł ten tekst.

(*Wahrheiten*) matematycznych. To jest przecież nieznośny stan, któremu trzeba położyć kres tak szybko, jak to tylko możliwe (Frege, 1896–1903/1976, s. 195).

W tej sytuacji Frege proponuje przede wszystkim przyjąć za znaczenie znaku równości identyczność, „zupełną zbieżność” (Frege, 1896–1903/1976, s. 195) – jak pisał. Dalej postuluje by odróżniać równość na poziomie sensu od równości na poziomie znaczenia, dzięki czemu matematyka zostanie uchroniona od generowania zawsze prawdziwych, ale nudnych przykładów zasady identyczności $a = a$. Pisał: „identyczność ma większą wartość poznawczą niż czysty przykład zasady identyczności” (Frege, 1896–1903/1976, s. 195).

PÓŹNIEJSZE WYPOWIEDZI NA TEMAT PRAWDY

Wkrótce po opublikowaniu pozycji zamykającej badany tu okres (1903b/2009) Frege wprowadził ważne punkty do swej teorii prawdy. Tematem do osobnego badania pozostaje, na ile odnalezienie antynomii warunkowało te zmiany.

Wart uwagi jest przedostatni list Fregego do Russella. Tam Frege po raz kolejny podkreśla szczególność predykatu „prawdziwy”. Co więcej pojawia się tam – po raz pierwszy – fragment, który może być podstawą do przypisywania Fregemu redundancyjnej koncepcji prawdy:

Słowo „prawdziwy” nie jest predykatem jak „zielony”, co do tego się zgadzamy. W zasadzie w zdaniu „to jest prawdziwe, że $2 + 3 = 5$ ” nie mówi nic więcej niż jest powiedziane w zdaniu „ $2 + 3 = 5$ ”. Prawdziwość nie jest częścią składową myśli, tak jak Mont Blanc ze swymi płatkami śniegu nie jest częścią składową myśli, iż Mont Blanc mierzy więcej niż 4000 metrów (Frege, 1904/1976, s. 245).

Pomijam tu dyskusję, czy Frege faktycznie opowiadał się za teorią zbędności prawdy i ewentualnie w jakim zakresie²¹.

W wyżej cytowanym liście jest także wyraźnie sformułowana zasada ekstensjonalności, mówiąca o zastępowalności wyrażen *salva veritate*, stosowana przez Fregego już wcześniej (Frege, 1893/2009):

Znaczenie jak najściślej musi być powiązane z prawdziwością. [...] Abstrahując od mowy zależnej, bez szkody dla prawdy, każde prawdziwe zdanie może być zastąpione innym prawdziwym zdaniem, a każde fałszywe – fałszywym. A wraz

²¹ Dla przykładu, Baldwin uważa, że Frege nie był zwolennikiem deflacyjnej koncepcji prawdy (Baldwin, 1997, s. 9).

z tym mówi się, że wszystkie zdania prawdziwe znaczą to samo lub oznaczają i podobnie fałszywe [...] (Frege, 1904/1976, s. 247).

Tematem prawdy Frege zajął się ponownie po zapoznaniu się w 1918 z nieopublikowaną wtedy jeszcze wersją *Logisch-philosophische Abhandlung* Ludwika Wittgensteina (Wittgenstein, 1921/1997) i opublikował artykuł na ten temat (Frege, 1918–1919/1990a). Tam powtórza wiele swych tez z wcześniejszego tekstu (Frege, 1897–1898/1983b), dodając argumentację przeciwko korespondencyjnej teorii prawdy²² i rozbudowaną, filozoficzną charakterystykę „królestwa myśli”, istotnie związanego z prawdą.

ZAKOŃCZENIE

W okresie wydawania dwóch tomów *Grundgesetze der Arithmetik* prawda była dla Fregego ważną kategorią z zakresu filozofii języka (od tego aspektu Frege rozpoczyna), logiki formalnej (tu prawda pełni rolę kluczowego „narzędzia”), filozofii logiki (wyrażanie ogólności i problem antynomii), filozofii matematyki (problem prawdziwości aksjomatów w geometrii i rozumienie równości w arytmetyce) i ontologii (idealistyczne rozumienie „królestwa myśli”, istotnie związane z prawdą). Mając na uwadze rozwój poglądów Fregego na temat prawdy (Sluga, 2002), zakończę zebraniem głównych tez z badanego tu okresu:

1. W punkcie wyjścia prawda jest badana w odniesieniu do języka codziennego.
2. W logice prawda jest wyrażana za pomocą znaku asercji, dlatego prawda jest związana z sądzeniem.
3. Prawda dotyczy logiki bardziej niż jakiegokolwiek innej nauki.
4. Prawda jest kategorią normatywną, bo prawa logiczne – jako prawdziwe – wyznaczają kierunek myśleniu.
5. Wyrażenia językowe mają sens i znaczenie, znaczeniem zdań są wartości logiczne (prawda, fałsz).
6. Przy pomocy wartości logicznych w systemie logicznym są charakteryzowane spójniki logiczne, kwantyfikator oraz wynikanie logiczne.

²² Szczegółowo Fregego krytyka korespondencyjnej teorii prawdy została omówiona w dwóch pozycji w bibliografii (Sluga, 2007, s. 4–9; Baldwin, 1997).

7. Nośnikami prawdziwości są: najpierw myśl, potem zdanie i język nauki, nigdy przedstawienie.
8. Z koncepcją prawdy jest istotnie związana filozoficzna koncepcja myśli, jako pewnej niezmiennej, obiektywnej rzeczywistości idealnej.
9. Prawdziwość jest terminem pierwotnym, niedefiniowalnym.
10. Prawda – obok niesprzeczności – jest ważną kategorią dla charakterystyki aksjomatów w geometrii.

BIBLIOGRAFIA

- Baldwin, T. (1997). Frege, Moore, Davidson: The Indefinability of Truth. *Philosophical Topics*, 25(2), 1–18.
- Besler, G. (2010). *Gottloba Fregego koncepcja analizy filozoficznej*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.
- Besler, G. (2013). Gottlob Frege o liczbie. Przyczynek do określenia roli, jaką dla filozofów pełni historia matematyki. *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, 53, 133–164.
- Besler, G. (2015). Tematyka korespondencji naukowej Gottloba Fregego z Bertrandem Russellem w latach 1902–1904. W: R. Murawski (red.), *Filozofia matematyki i informatyki* (s. 91–106). Kraków: Copernicus Center Press.
- Besler, G. (w druku). „Podążamy tymi samymi lub podobnymi drogami myślowymi”. *Tematyka korespondencji logicznej Gottloba Fregego z Giuseppem Peanem, Dawidem Hilbertem i Bertrandem Russellem*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.
- Blanchette, P. (2015). Frege’s Critique of Modern Axioms. W: D. Schott (red.), *Frege: Freund(e) und Feind(e). Proceedings of the International Conference 2013* (s. 105–120). Berlin: Logos Verlag.
- Burge, T. (2005). *Truth, Thought, Reason. Essays on Frege*. Oxford: Clarendon Press.
- Cook, R. (2013). Appendix: How to read *Grundgesetze*. W: G. Frege (2013), s. A-1–A-42.
- Dummett, M. (1981). *The Interpretation of Frege’s Philosophy*. Cambridge: Harvard University Press.
- Frege, G. (1879/1997). *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Hrsg. I. Angelelli. Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag. Wyd. polskie (fragmenty): Ideografia. Język formalny czystego myślenia wzorowany na języku arytmetyki (Przedmowa, §§ 1–13). W: K. Rotter (1997), s. 45–85.
- Frege, G. (1885/1990). Über formale Theorien der Arithmetik. W: G. Frege (1990), s. 103–111.
- Frege, G. (1891/1990). Funktion und Begriff. W: G. Frege (1990), s. 125–142. Wyd. polskie: Funkcja i pojęcie. W: G. Frege 1977, s. 18–44.
- Frege, G. (1892/1990a). Über Begriff und Gegenstand. W: G. Frege (1990), s. 167–178. Wyd. polskie: Sens i znaczenie. W: G. Frege (1977), s. 45–59.

- Frege, G. (1892/1990b). Über Sinn und Bedeutung. W: G. Frege (1990), s. 143–162. Wyd. polskie: Sens i znaczenie. W: G. Frege (1977), s. 60–88.
- Frege, G. (1893/2009). Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschrift abgeleitet. Bd. 1. W: G. Frege (2009), s. 1–303.
- Frege, G. (1896/1990). Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene. W: G. Frege (1990), s. 220–233.
- Frege, G. (1899/1990). Über die Zahlen des Herrn H. Schubert. W: G. Frege (1990), s. 240–261.
- Frege, G. (1903/2009a). Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschrift abgeleitet. Bd. 2. W: G. Frege (2009), s. 305–583.
- Frege, G. (1903/2009b). Nachwort. W: G. Frege (2009), s. 549–563.
- Frege, G. (1903/2009c). Über die Grundlagen der Geometrie. W: G. Frege (1990), s. 262–266.
- Frege, G. (1906/1990). Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae. W: G. Frege (1990), s. 324–328.
- Frege, G. (1908/1990). Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs neue nachgewiesen. W: G. Frege (1990), s. 329–333.
- Frege, G. (1918–1919/1990a). Der Gedanke. Eine logische Untersuchung. W: G. Frege (1990) s. 342–361. Wyd. polskie: Myśl – studium logiczne. W: G. Frege (1977), s. 101–129.
- Frege, G. (1918–1919/1990b). Die Verneinung. Eine logische Untersuchungen. W: G. Frege (1990), s. 362–378. Wyd. polskie: Negacja. Badanie logiczne. Tłum. M. Klementowicz. *Kwartalnik Filozoficzny*, 30 (1), 139–157.
- Frege, G. (1923/1990). Gedankengefüge. W: G. Frege (1990), s. 378–394.
- Frege, G. (1976). *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hrsg. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, Ch. Thiel, A. Veraart. Hamburg: Felix Meiner Verlag.
- Frege, G. (1895/1976). Frege an Hilbert, 1.10. W: G. Frege (1976), s. 58–59.
- Frege, G. (1896/1976). Frege an Peano, 29.09. W: G. Frege (1976), s. 181–186.
- Frege, G. (1896–1903/1976). Frege an Peano, bez daty. W: G. Frege (1976), s. 194–198.
- Frege, G. (1899/1976). Frege an Hilbert, 27.12. W: G. Frege (1976), s. 60–64.
- Frege, G. (1900/1976). Frege an Hilbert, 6.01. W: G. Frege (1976), s. 70–76.
- Frege, G. (1902/1976a). Frege an Russell, 22.06. W: G. Frege (1976), s. 212–215. Wyd. polskie: List do B. Russella 22.06.1902. W: R. Murawski (1986), s. 203–204.
- Frege, G. (1902/1976b). Frege an Russell, 29.06. W: G. Frege (1976), s. 217–219.
- Frege, G. (1902/1976c). Frege an Russell, 20.10. W: G. Frege (1976), s. 231–233.
- Frege, G. (1903/1976). Frege an Russell, 21.05. W: G. Frege (1976), s. 239–241.
- Frege, G. (1904/1976). Frege an Russell, 3.11. W: G. Frege (1976), s. 243–248.
- Frege, G. (1977). *Pisma semantyczne*. Warszawa: PWN.
- Frege, G. (1983). *Nachgelassene Schriften*. Hamburg: Felix Meiner Verlag.
- Frege, G. (1879–1891/1983). Logik. W: G. Frege (1983), s. 1–8.
- Frege, G. (1897–1898/1983a). Begründung meiner strengeren Grundsätze des Definierens. W: G. Frege (1983), s. 164–170.

- Frege, G. (1897–1898/1983b). Logik. W: G. Frege (1983), s. 137–163.
- Frege, G. (1898–1903/1983). Logische Mängel in der Mathematik. W: G. Frege (1983), s. 171–181.
- Frege, G. (1899–1906/1983). Über Euklidische Geometrie. W: G. Frege (1983), s. 182–184.
- Frege, G. (1906/1983). Einleitung in die Logik. W: G. Frege (1983), s. 201–212.
- Frege, G. (1914/1983). Logik in der Mathematik. W: G. Frege (1983), s. 219–270.
- Frege, G. (1990). *Kleine Schriften*. Hrsg. I. Angelelli. Hildesheim: Georg Olms.
- Frege, G. (2009). *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschrift abgeleitet. Bd. 1 und 2, in moderne Formelnotation transkribiert und mit einem ausführlichen Sachregister versehen von T. Müller, B. Schröder, R. Stuhlmann-Laeisz*. Paderborn: Mentis.
- Frege, G. (2013). *Basic Laws of Arithmetic. Derived Using Concept-script*. Oxford: Oxford University Press.
- Freudenthal, H. (2009). *Selecta*. Pobrane z: <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/freudselecta.pdf>.
- Freudenthal, H. (1957/2009). Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Zugleich eine Besprechung der 8. Aufl. von Hilbert's „Grundlagen der Geometrie“. W: H. Freudenthal (2009), s. 486–523.
- Glanzberg, M. (2018). *The Oxford Handbook of Truth*. Oxford: Oxford University Press.
- Greimann, D. (2000). The Judgement-Stroke as a Truth-Operator. A New Interpretation of the Logical Form of Sentences in Frege's Scientific Language. *Erkenntnis*, 52(2), 213–238.
- Greimann, D. (2003a). *Das Wahre und das Falsche*. Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag.
- Greimann, D. (2003b). *Frege's Konzeption der Wahrheit*. Hildesheim. Zürich, New York: Georg Olms Verlag.
- Greimann, D. (red.). (2007). *Essays on Frege's Conception of Truth*. Amsterdam, New York: Rodopi.
- Heck, R. (2010). Frege and Semantics. W: M. Potter, T. Ricketts (red.), *The Cambridge companion to Frege* (s. 342–378). New York: Cambridge University Press.
- Heck, R. G., May, R. (2018). Truth in Frege. W: M. Glanzberg (red.), *The Oxford Handbook of Truth* (s. 193–215). New York: Oxford University Press.
- Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Verlag von B.G. Teubner.
- Marek, I. (1993). Początki matryc logicznych. *Logika*, 15, 5–44.
- Miszczyński, R. (2015). Fregego krytyka arytmetyki formalnej w *Grundgesetze der Arithmetik*. *Filozofia Nauki*, 23(4), 89–102.
- Murawski, R. (red.). (1986). *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.
- Murawski, R. (red.). (2015). *Filozofia matematyki i informatyki*. Kraków: Copernicus Center Press.
- Pietruszczak, A., Malinowski J. (red.). (2004). *Wokół filozofii logicznej*. Toruń: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.
- Potter, M., Ricketts T. (red.). (2010). *The Cambridge Companion to Frege*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Reck E.H. (2002). *From Frege to Wittgenstein. Perspectives on Early Analytic Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.
- Rotter, K. (red.). (1997). *Próby gramatyki filozoficznej. Antologia: Franz Brentano, Gottlob Frege, Christian Thiel*. Wrocław: Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego.
- Russell, B. (1902/1976). Russell and Frege, 16.06. W: G. Frege (1976), s. 211–212. Wyd. polskie: Murawski (1986), s. 221–222.
- Rygalski, A. (2004). Frege o prawdzie. W: A. Pietruszczak, J. Malinowski (red.), *Wokół filozofii logicznej* (s. 295–310). Toruń: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.
- Schott D. (red.). (2015). *Frege: Freund(e) und Feind(e). Proceedings of the International Conference 2013*. Berlin: Logos Verlag, s. 105–120.
- Sluga H. (2002). Frege on Indefinability of Truth. W: E.H. Reck (red.), *From Frege to Wittgenstein. Perspectives on Early Analytic Philosophy* (s. 75–95). Oxford: Oxford University Press.
- Wittgenstein, L. (1921/1997). *Tractatus logico-philosophicus. Logisch-philosophische Abhandlung*. Leipzig: Unesma. Wyd. polskie: *Tractatus logico-philosophicus*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

GOTTLOB FREGE ON TRUTH DURING THE PERIOD OF EDITION OF TWO VOLUMES
OF *GRUNDEGESETZE DER ARITHMETIK* (1893–1903)

SUMMARY: In 1893 and 1903, two volumes of Frege's most important work *Grundegezte der Arithmetik* were published. This period can be called the peak of Frege's logicism. Although the subject of truth in Frege's logical and philosophical works has been repeatedly investigated there is a lack of studies on his view in this period, especially in the Polish literature. In this article, therefore, I carry out the following research task: to collect and order Frege's statements about the truth during the period of publishing two volumes of *Grundegezte der Arithmetik*. I will refer to texts published during Frege's life, published posthumously and his correspondence. Particularly noteworthy are: *Grundegezte der Arithmetik* and the unpublished *Logik* (1897–1898). That is why separate sections are devoted to these two items, and remarks on truth from other texts are grouped thematically: the problem of antinomy, geometry, expression of generality, and others. The subject of truth appears here in relation to logic, philosophy of language, philosophy of logic, philosophy of mathematics and ontology.

KEY WORDS: Gottlob Frege, truth, logic, truth-values, thought, logicism.

